7/5/19

(3) $\Rightarrow$ (4)

Υποθέτουμε ότι ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής

Θ.δ.ο ο (X,ρ) είναι πλήρης

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο X.

Εφόσον ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής, υπάρχει $x\in X$ και υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, συμπεραίνουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Τώρα θ.δ.ο ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος

Με απαγωγή σε άτοπο η απόδειξη

Υποθέτοντας ότι ο (X,ρ) δεν είναι ολικά φραγμένος, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $\boxed{\text{για κάθε } m\in\mathbb{N},\ y_1,\dots,y_m\in X,\ X\neq \bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(y_k,\varepsilon)}$ (*)

Χρησιμοποιώντας την (*) θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία στο X $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε όλοι οι όροι να απέχουν μεταξύ τους τουλάχιστον ε

δηλαδή $\rho(x_n,x_m)\geq\varepsilon$, $\forall n\neq m$

→ Επιλέγουμε $x_1\in X$ τυχαίο

→ Λόγω της (*) μπορούμε να επιλέξουμε $x_2\in X\setminus B_\rho(x_1,\varepsilon)$

Τότε $\rho(x_1,x_2)\geq\varepsilon$

→ Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί $x_1,\dots,x_n\in X$ ώστε αν $i,j\in\{1,\dots,n\}$ με $i\neq j$ τότε $\rho(x_i,x_j)\geq\varepsilon$

Λόγω της (*) μπορούμε να επιλέξουμε $x_{n+1}\in X\setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(x_k,\varepsilon)$

τότε $\rho(x_{n+1},x_i)\geq\varepsilon$, $\forall i=1,\dots,n$. Έτσι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο X με $\rho(x_n,x_m)\geq\varepsilon$ για $n\neq m$

Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει καμία βασική υπακολουθία, άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία. Άτοπο, διότι ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής

Επομένως, ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Εστω οτι ο (X,ρ) ειναι πληρης και ολικά φραγμενος

Θ.δ.ο ο (X,ρ) ειναι συμπαγης

Υποθετουμε (προς απαγωγη σε ατοπο) οτι ο (X,ρ) δεν ειναι συμπαγης

Τοτε υπαρχει ενα ανοικτό καλυμμα $(G_i)_{i\in I}$ του X (δηλ. $X = \bigcup_{i\in I} G_i$)

που δεν εχει πεπερασμενο υποκάλυμμα [δηλ. για καθε $J \subseteq I$ με

J πεπερασμενο $X \neq \bigcup_{i\in J} G_i$]

Εφοσον ο (X,ρ) ειναι ολικά φραγμενος

Υπάρχουν $N_1 \in \mathbb{N}$ $x_{11}, \dots, x_{1N_1} \in X$ ωστε $X = \bigcup_{k=1}^{N_1} B_\rho(x_{1k}, \frac{1}{2})$

<u>Ισχυρισμος</u>: Υπαρχει $j_1 \in \{1, \dots, N_1\}$ ωστε $B_\rho(x_{1j_1}, \frac{1}{2}) \setminus \bigcup_{i\in J} G_i \neq \emptyset$

για καθε J πεπερασμενο υποσυνολο του I

<u>Αποδ</u>

Αν δεν ισχυει αυτο τοτε για καθε $k=1,\dots,N_1$ υπάρχει $J_k \subseteq I$, J_k: πεπερασμενο

ωστε $B_\rho(x_{1k}, \frac{1}{2}) \subseteq \bigcup_{i\in J_k} G_i$

Αρα $X = \bigcup_{k=1}^{N_1} B_\rho(x_{1k}, \frac{1}{2}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_1} \bigcup_{i\in J_k} G_i = \bigcup_{i\in J_1 \cup \dots \cup J_{N_1}} G_i$

ατοπο διοτι το $J_1 \cup \dots \cup J_{N_1}$ ειναι πεπερασμενο

Θετουμε $\boxed{x_1 = x_{1j_1}}$

Εφοσον ο (X,ρ) ειναι ολικά φραγμενος υπάρχουν $N_2 \in \mathbb{N}$ και $x_{21}, \dots, x_{2N_2} \in X$

ωστε $X = \bigcup_{k=1}^{N_2} B_\rho(x_{2k}, \frac{1}{2^2})$

Αρα $B_\rho(x_1, \frac{1}{2}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_2} B_\rho(x_{2k}, \frac{1}{2^2})$

Μπορουμε να υποθεσουμε οτι $B_\rho(x_1, \frac{1}{2}) \cap B_\rho(x_{2k}, \frac{1}{2^2}) \neq \emptyset$, $\forall k = 1, \dots, N_2$

(παραλειποντας τα x_{2k} για τα οποία αυτο δεν συμβαινει)

Οπως στον προηγουμενο ισχυρισμο υπαρχει $j_2 \in \{1, \dots, N_2\}$ ωστε $B_\rho(x_{2j_2}, \frac{1}{2^2}) \setminus (\bigcup_{i\in J} G_i) \neq \emptyset$

για καθε $J \subseteq I$ με J: πεπερασμενο

Θετουμε $\boxed{x_2 = x_{2j_2}}$. Εφοσον $B_\rho(x_1, \frac{1}{2}) \cap B_\rho(x_2, \frac{1}{2^2}) \neq \emptyset$, συμπεραινουμε

οτι: $\rho(x_1, x_2) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο επαγωγικά ορίζεται μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με τις εξής ιδιότητες:

(α) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $J\subseteq I$ με J πεπερασμένο ισχύει:

$$B_\rho(x_n, \frac{1}{2^n}) \setminus \bigcup_{i\in J} G_i \neq \emptyset$$

(β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$: $\rho(x_n, x_{n+1}) < \frac{3}{2^{n+1}}$

Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} < +\infty$

η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία

[Πράγματι: Έστω $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$. $\sum_{n=n_0}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$
και άρα για $n,m\geq n_0$: $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$]

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης, υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Εφόσον $X = \bigcup_{i\in I} G_i$ $\exists\, i_0\in I$, $x\in G_{i_0}$

Εφόσον το G_{i_0} είναι ανοικτό $\exists\, \delta>0$ ώστε: $B_\rho(x,\delta) \subseteq G_{i_0}$

Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $\frac{1}{2^n} \to 0$ $\exists\, n\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \delta/2$
και $\frac{1}{2^n} < \delta/2$

Τότε για κάθε $y\in B_\rho(x_n, \frac{1}{2^n})$ ισχύει $\rho(y,x) \leq \rho(y,x_n) + \rho(x_n,x)$

$$< \frac{1}{2^n} + \delta/2 < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

Άρα $B_\rho(x_n, \frac{1}{2^n}) \subseteq B_\rho(x,\delta) \subseteq G_{i_0}$
άτοπο (από το (α) παραπάνω)

Επομένως ο (X,ρ) είναι συμπαγής

Ορισμος

Εστω (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) δυο μετρικοί χώροι.
Μια μετρική ρ στον $X_1 \times X_2$ λεγεται <u>μετρική γινόμενο</u>
αν για καθε ακολουθία $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X_1 \times X_2$ και καθε $(x,y) \in X_1 \times X_2$
ισχυει:

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho} (x,y) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_1} x \text{ και } y_n \xrightarrow{\rho_2} y$$

[ο ορισμος επεκτεινεται για γινομενα $X_1 \times \dots \times X_k$, οπου (X_i, ρ_i) μ.χ]

Παραδειγμα

Η ευκλειδεια μετρική στον $\mathbb{R}^n$ ειναι μετρική γινομενο οπως εχουμε αποδειξει.

Προταση

Αν (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) δυο συμπαγείς μετρικοί χωροι
και ρ μια μετρική γινόμενο στο $X_1 \times X_2$
τοτε ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ ειναι συμπαγής

Αποδειξη

Απο το προηγουμενο θεωρημα αρκεί ν.δ.ο ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ ειναι ακολουθιακά συμπαγής
Εστω $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαια ακολουθία στον $X_1 \times X_2$
Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι ακολουθία στον (X_1, ρ_1) και εφοσον ο (X_1, ρ_1) ειναι συμπαγης,
αρα ακολουθιακά συμπαγής, υπαρχει μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
και $x \in X$ ωστε $\boxed{x_{k_n} \xrightarrow{\rho_1} x}$ ①
Η $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι ακολουθία στον (X_2, ρ_2) που ειναι συμπαγής,
αρα ακολουθιακά συμπαγής, αρα υπάρχει μια υπακολουθία $(y_{k_{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$
και $y \in X_2$ ωστε $\boxed{y_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho_2} y}$ ②

Η $(x_{k_{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι υπακολουθία της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ αρα ① $\Rightarrow$ $\boxed{x_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho_1} x}$ ③

Απο τις ②, ③ και εφοσον η ρ ειναι μετρική γινομενο συμπεραινουμε οτι
$(x_{k_{\lambda_n}}, y_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{\rho} (x,y)$
Αρα ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ ειναι ακολουθιακά συμπαγής αρα συμπαγής

Παρατηρηση

Το ίδιο συμπερασμα ισχυει για γινομενα πεπερασμενων από δυο μ.χ
δηλ. αν $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ συμπαγείς μ.χ και ρ μετρική γινομενο
στον $X = \prod_{i=1}^{k} X_i \ (= X_1 \times \dots \times X_k)$
τοτε ο (X, ρ) ειναι συμπαγής.

Πορισμα
Στον Ευκλειδειο χωρο $\mathbb{R}^k$ τα συνολα της μορφής
$[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k]$ ειναι συμπαγή

Θεωρημα
Ενα $K \subseteq \mathbb{R}^k$ ειναι συμπαγές αν και μονο αν ειναι κλειστό και φραγμενο

Αποδειξη

($\Rightarrow$) Αν K ειναι συμπαγές, τοτε ειναι κλειστό και φραγμενο (αυτο ισχυει γενικά)

($\Leftarrow$) Αν K κλειστό και φραγμενο υποσυνολο του $\mathbb{R}^k$
τοτε $\exists M>0 : K \subseteq B_{\rho_2}(0, M)$

αρα $K \subseteq \underbrace{[-M, M] \times [-M, M] \times \dots \times [-M, M]}_{k-\text{φορες}}$

Το τελευταιο συνολο ειναι συμπαγες.
Αρα εφοσον το K ειναι κλειστό υποσυνολο συμπαγούς, θα ειναι συμπαγες